Défis 1ère Spé maths : Second degré équations – Thiaude P.

Défi SECDEG 01 **Le rectangle d'aire et périmètre connus (grand classique)**
Un terrain rectangulaire a une aire de 1 470 m² et un périmètre de 154 m.
Quelle est sa longueur et quelle est sa largeur ?

Corrigé
Notons x la longueur et y la largeur (en m) de ce rectangle.
Le périmètre est égale à 154 m, donc : $2(x+y) = 154$.
On a les équivalences :

$$2(x+y) = 154 \Leftrightarrow x+y = \frac{154}{2} \Leftrightarrow y = 77 - x$$

L'aire est égale à 1 470 m^2, donc : $x \times y = 1470$, or $y = 77 - x$
donc : $x \times (77 - x) = 1\,470$.
On a les équivalences :

$$\begin{aligned}
& x(77-x) = 1\,470 \\
\Leftrightarrow\ & 77x - x^2 = 1\,470 \\
\Leftrightarrow\ & 0 = 1\,470 - 77x + x^2 \\
\Leftrightarrow\ & x^2 - 77x + 1\,470 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (x)^2 - 2(x)\left(\frac{77}{2}\right) + \left(\frac{77}{2}\right)^2 - \frac{5\,929}{4} + \frac{1\,470 \times 4}{4} = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left(x - \frac{77}{2}\right)^2 - \frac{5\,929}{4} + \frac{5\,880}{4} = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left(x - \frac{77}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left(x - \frac{77}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left(x - \frac{77}{2} + \frac{7}{2}\right)\left(x - \frac{77}{2} - \frac{7}{2}\right) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left(x - \frac{70}{2}\right)\left(x - \frac{84}{2}\right) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (x-35)(x-42) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & x - 35 = 0 \ \ ou \ \ x - 42 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & x = 35 \ \ ou \ \ x = 42
\end{aligned}$$

Si $x = 35$, alors $y = 77 - 35 = 42$ (impossible, x est la longueur).
Si $x = 42$, alors $y = 77 - 42 = 35$.

Le rectangle a une longueur de 42 m et une largeur de 35 m.

Vérification au brouillon

$$2 \times (42 + 35) = 2 \times 77 = 154$$
$$42 \times 35 = 1\,470$$

Autre méthode : utilisation du discriminant
$x^2 - 77x + 1\,470 = 0$
$x^2 - 77x + 1\,470$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 1$, $b = -77$ et
$c = 1\,470$, de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = (-77)^2 - 4(1)\big(1\,470\big) = 49$.
$\Delta > 0$ donc l'expression $x^2 - 77x + 1\,470$ admet deux racines réelles distinctes :

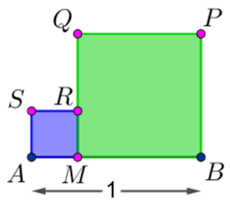
$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+77 - \sqrt{49}}{2(1)} = \frac{77-7}{2} = \frac{70}{2} = 35$$
$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+77 + \sqrt{49}}{2(1)} = \frac{77+7}{2} = \frac{84}{2} = 41$$

Si $x = 35$, alors $y = 77 - 35 = 42$ (impossible, x est la longueur).
Si $x = 42$, alors $y = 77 - 42 = 35$.

Le rectangle a une longueur de 42 m et une largeur de 35 m.

Défi SECDEG 02 Les deux carrés (un grand classique)

On sait que : $AB = 1$ et $M \in [AB]$. Pour quelle(s) valeur(s) de la distance AM la somme des aires des deux carrés $AMRS$ et $MBPQ$ est-elle égale à $\frac{2}{3}$?



Corrigé

Notons x la distance AM. Le carré $AMRS$ a pour côté x donc son aire est : x^2 et le carré $MBPQ$ a pour côté $1 - x$ donc son aire est : $(1-x)^2$:

$$x^2 + (1-x)^2 = \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 1 - 2x + x^2 = \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 2x + \frac{1}{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\left[x^2 - x + \frac{1}{6}\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\left[(x)^2 - 2(x)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{12} + \frac{2}{12}\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{12}\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\left(x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)\left(x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} = 0 \ \ ou \ \ x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2\left(\sqrt{3}\right)^2} \ \ ou \ x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2\left(\sqrt{3}\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} \approx 0{,}21 \ \ ou \ x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} \approx 0{,}79$$

Ces deux nombres appartenant à $[0; 1]$ ils sont acceptés.

Il y a donc deux possibilités :

$$AM = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} \ \text{ ou } \ AM = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}$$

Autre méthode : utilisation du discriminant

$$2x^2 - 2x + \frac{1}{3} = 0$$

$2x^2 - 2x + \frac{1}{3}$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 2$, $b = -2$ et $c = \frac{1}{3}$, de discriminant

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(2)\left(\frac{1}{3}\right) = 4 - \frac{8}{3} = \frac{12}{3} - \frac{8}{3} = \frac{12-8}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$\Delta > 0$ donc l'expression $2x^2 - 2x + \frac{1}{3}$ admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}}{2(2)} = \frac{\frac{6}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3}}{4} = \frac{\frac{6 - 2\sqrt{3}}{3}}{4} = \frac{6 - 2\sqrt{3}}{3} \times \frac{1}{4}$$
$$= \frac{2(3 - \sqrt{3})}{3 \times 2 \times 2} = \frac{3 - \sqrt{3}}{6} = \frac{3}{6} - \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}}{2(2)} = \frac{\frac{6}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3}}{4} = \frac{\frac{6 + 2\sqrt{3}}{3}}{4} = \frac{6 + 2\sqrt{3}}{3} \times \frac{1}{4}$$
$$= \frac{2(3 + \sqrt{3})}{3 \times 2 \times 2} = \frac{3 + \sqrt{3}}{6} = \frac{3}{6} + \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}$$

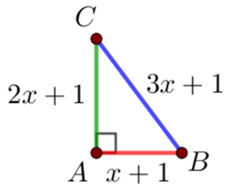
Ces deux nombres appartenant à $[0; 1]$ ils sont acceptés.

Il y a donc deux possibilités :

$$AM = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} \ \text{ ou } \ AM = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}$$

Défi SECDEG 03 un triangle rectangle (un grand classique)

ABC est un triangle rectangle tel que $AB = x + 1$, $AC = 2x + 1$ et $BC = 3x + 1$ où x est un réel strictement positif.



Que vaut x ?

<u>**Corrigé**</u>

Le triangle ABC est rectangle en A donc d'après le théorème de Pythagore on en déduit que : $BC^2 = BA^2 + AC^2$. Or, $BC = 3x + 1$, $BA = x + 1$ et $AC = 2x + 1$, donc :

$$\begin{aligned}
&(3x+1)^2 = (x+1)^2 + (2x+1)^2 \\
\Leftrightarrow\ & 9x^2 + 6x + 1 = x^2 + 2x + 1 + 4x^2 + 4x + 1 \\
\Leftrightarrow\ & 9x^2 - x^2 - 4x^2 + 6x - 2x - 4x + 1 - 1 - 1 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & 4x^2 - 1 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (2x)^2 - (1)^2 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (2x+1)(2x-1) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & 2x + 1 = 0 \ \ ou \ \ 2x - 1 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & 2x = -1 \ ou \ 2x = 1 \\
\Leftrightarrow\ & x = -\frac{1}{2} \ \ ou \ \ x = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Or, l'énoncé indique que x est un réel strictement positif, donc on refuse $x = -\frac{1}{2}$

<u>Conclusion</u> $x = \frac{1}{2}$.

Défi SECDEG 04 équation bicarrée (un grand classique)

• factoriser dans $\mathbb{R}$: $X^2 - 54X + 245$ puis : $x^4 - 54x^2 + 245$

• résoudre dans $\mathbb{R}$: $x^2(54 - x^2) = 245$

<u>**Corrigé**</u>

• factorisons dans $\mathbb{R}$: $\boldsymbol{X^2 - 54X + 245}$

$X^2 - 54X + 245$ est de la forme $aX^2 + bX + c$ avec $a = 1$, $b = -54$ et $c = 245$.

Son discriminant est : $\Delta = b^2 - 4ac = (-54)^2 - 4(1)(245) = 1936$.

$\Delta > 0$ donc l'expression $X^2 - 54X + 245$ admet deux racines réelles distinctes :

$$X_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+54 - \sqrt{1936}}{2(1)} = \frac{54 - 44}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$X_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+54 + \sqrt{1936}}{2(1)} = \frac{54 + 44}{2} = \frac{98}{2} = 49$$

Lorsque $\Delta > 0$, on a : $aX^2 + bX + c = a(X - X_1)(X - X_2)$ donc :

$$\forall X \in \mathbb{R}, X^2 - 54X + 245 = 1(X - 5)(X - 49)$$

Conclusion : $\forall \boldsymbol{X} \in \mathbb{R}, \boldsymbol{X^2 - 54X + 245 = (X - 5)(X - 49)}$ $(*)$.

• factorisons dans $\mathbb{R}$: $\boldsymbol{x^4 - 54x^2 + 245}$

En posant $X = x^2$ dans $(*)$ on obtient :

$$(x^2)^2 - 54 \times x^2 + 245 = (x^2 - 5)(x^2 - 49)$$

autrement dit : $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}, \boldsymbol{x^4 - 54x^2 + 245 = (x^2 - 5)(x^2 - 49)}$.

On pourrait donner une factorisation plus poussée sous forme d'un produit de quatre polynômes du premier degré mais la consigne ne le demande pas explicitement.

• résolvons dans $\mathbb{R}$: $\boldsymbol{x^2(54 - x^2) = 245}$.

On a les équivalences :

$$\begin{aligned}
&x^2(54 - x^2) = 245 \Leftrightarrow 54x^2 - x^4 = 245 \Leftrightarrow 0 = 245 - 54x^2 + x^4 \\
&\Leftrightarrow x^4 - 54x^2 + 245 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 5)(x^2 - 49) = 0 \\
&\Leftrightarrow x^2 - 5 = 0 \ ou \ x^2 - 49 = 0
\end{aligned}$$

On a d'une part :

$$\begin{aligned}
&x^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \sqrt{5}\right)\left(x - \sqrt{5}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow x + \sqrt{5} = 0 \ ou \ x - \sqrt{5} = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{5} \ ou \ x = \sqrt{5}
\end{aligned}$$

et d'autre part on a :

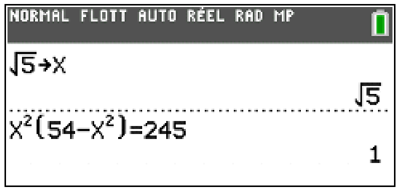
$$\begin{aligned}
&x^2 - 49 = 0 \Leftrightarrow x^2 - (7)^2 = 0 \Leftrightarrow (x + 7)(x - 7) = 0 \\
&\Leftrightarrow x + 7 = 0 \ ou \ x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = -7 \ ou \ x = 7
\end{aligned}$$

<u>Conclusion</u>

L'équation $x^2(54 - x^2) = 245$ admet pour solution dans $\mathbb{R}$: -7, $-\sqrt{5}$, $\sqrt{5}$ et 7.

<u>Vérification avec la calculatrice</u>

Par exemple de la solution $\sqrt{5}$:



Défi SECDEG 05 **une équation du troisième degré**

Pour tout réel x, on pose : $f(x) = 14x^3 - 39x^2 - 11x + 6$.
Déterminer les réel b et c tels que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (x-3)(14x^2 + bx + c)$
puis résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x) = 0$.

Corrigé

• **recherche de b et c tels que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (x-3)(14x^2 + bx + c)$**

Développons $(x-3)(14x^2 + bx + c)$:

$$\begin{aligned}&(x-3)(14x^2 + bx + c)\\ &= 14x^3 + bx^2 + cx - 42x^2 - 3bx - 3c\\ &= 14x^3 + (b-42)x^2 + (c-3b)x - 3c\end{aligned}$$

Cette dernière expression doit être égale, pour tout réel x, à :

$$14x^3 - 39x^2 - 11x + 6$$

donc par identification :

$$\begin{cases} b - 42 = -39 \\ c - 3b = -11 \\ -3c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -39 + 42 \\ c = -11 + 3b \\ c = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 \\ c = -11 + 3(3) \\ c = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 \\ c = -2 \\ c = -2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 \\ c = -2 \end{cases}$$

On a donc : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (x-3)(14x^2 + 3x - 2)$.

Il est fortement conseillé de vérifier à la calculatrice : superposition des courbes …

• **résolvons l'équation $f(x) = 0$**

$f(x) = 0$ s'écrit $(x-3)(14x^2 + 3x - 2) = 0$.
On a les équivalences :

$$\begin{aligned}&(x-3)(14x^2 + 3x - 2) = 0\\ &\Leftrightarrow x - 3 = 0 \text{ ou } 14x^2 + 3x - 2 = 0\\ &\Leftrightarrow x = 3 \text{ ou } 14x^2 + 3x - 2 = 0\end{aligned}$$

$14x^2 + 3x - 2$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 14$, $b = 3$ et $c = -2$,
de discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = (3)^2 - 4(14)(-2) = 9 + 112 = 121$
$\Delta > 0$ donc il y a deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 - \sqrt{121}}{2(14)} = \frac{-3 - 11}{2 \times 14} = \frac{-14}{2 \times 14} = -\frac{1}{2}$$
$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 + \sqrt{121}}{2(14)} = \frac{-3 + 11}{28} = \frac{8}{28} = \frac{4 \times 2}{4 \times 7} = \frac{2}{7}$$

L'équation $f(x) = 0$ admet donc pour solutions dans $\mathbb{R}$: $-\frac{1}{2}, \frac{2}{7}$ et 3.

Il est fortement conseillé de vérifier à la calculatrice.

Défi SECDEG 06 **une équation avec dénominateur**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^2 = \frac{6}{x^2+1}$.

Corrigé

L'équation est équivalente à : $x^2(x^2 + 1) = 6$, ou encore : $(x^2)^2 + x^2 - 6 = 0$.
En posant $X = x^2$, elle s'écrit : $X^2 + X - 6 = 0$.
$X^2 + X - 6$ est de la forme $aX^2 + bX + c$avec $a = 1$, $b = 1$ et $c = -6$,
de discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4(1)(-6) = 1 + 24 = 25$
$\Delta > 0$ donc l'expression en X admet deux racines réelles distinctes :

$$X_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - \sqrt{25}}{2(1)} = \frac{-1 - 5}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$
$$X_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + \sqrt{25}}{2(1)} = \frac{-1 + 5}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

On a donc : $X = -3$ ou $X = 2$, or $X = x^2$ donc $x^2 = -3$ ou $x^2 = 2$:

• $x^2 = -3$ est impossible (le carré d'un réel est toujours un réel positif ou nul)

• $x^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - (\sqrt{2})^2 = 0 \Leftrightarrow (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2}) = 0$
$\Leftrightarrow x + \sqrt{2} = 0 \text{ ou } x - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{2} \text{ ou } x = \sqrt{2}$

Conclusion

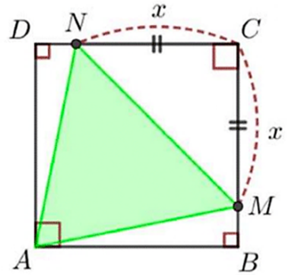
L'équation initiale admet pour solutions dans $\mathbb{R}$: $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$.

Défi SECDEG 07 **un triangle dans un carré**

Soit $ABCD$ est un carré de côté 1.

Pour tout réel x appartenant à $]0;1]$ on note :
• M le point de $[BC]$ tel que $CM = x$
• N le point de $[CD]$ tel que $CN = x$

Pour quelle valeur de x le triangle AMN est-il équilatéral ?



Corrigé

Remarquons d'abord que le triangle ABM est rectangle en B donc d'après le théorème de Pythagore on en déduit : $AM^2 = AB^2 + BM^2$, puis comme $AB = 1$ et $BM = 1 - x$: $AM^2 = 1^2 + (1-x)^2$.
De même, en raisonnant dans ADN rectangle en D : $AN^2 = AD^2 + DN^2$ et comme $AD = 1$ et $DN = 1 - x$ on obtient : $AN^2 = 1^2 + (1-x)^2$.
On constate que $AM^2 = AN^2$ ce qui équivaut à $AM = AN$, par conséquent dire que AMN est équilatéral revient ici à dire que $AM = MN$, autrement dit

que $AM^2 = MN^2$.
Dans CMN rectangle en C, en appliquant le théorème de Pythagore, on a :
$MN^2 = MC^2 + CN^2 = x^2 + x^2 = 2x^2$.

Il s'agit donc de résoudre dans $[0;1]$ l'équation : $1^2 + (1-x)^2 = 2x^2$.

On a les équivalences :
$1^2 + (1-x)^2 = 2x^2 \Leftrightarrow 1 + 1 - 2x + x^2 = 2x^2 \Leftrightarrow 2 - 2x + x^2 - 2x^2 = 0$
$\Leftrightarrow -x^2 - 2x + 2 = 0$
$-x^2 - 2x + 2$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = -1$, $b = -2$ et $c = 2$,
de discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(-1)(2) = 4 + 8 = 12$.
$\Delta > 0$ donc l'expression admet deux racines réelles distinctes.

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$
$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+2 - 2\sqrt{3}}{2(-1)} = \frac{2 \times \left(1 - \sqrt{3}\right)}{2 \times (-1)} = \frac{1 - \sqrt{3}}{-1} = -1 + \sqrt{3}$$
$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+2 + 2\sqrt{3}}{2(-1)} = \frac{2 \times \left(1 + \sqrt{3}\right)}{2 \times (-1)} = \frac{1 + \sqrt{3}}{-1} = -1 - \sqrt{3}$$

À l'aide de la calculatrice : $-1 + \sqrt{3} \approx 0{,}732 \in [0;1]$ donc est accepté,
mais : $-1 - \sqrt{3} < 0$ donc $-1 - \sqrt{3} \notin [0;1]$ est rejeté.

Conclusion Le triangle AMN est équilatéral si et seulement si $x = -1 + \sqrt{3}$.

Défi SECDEG 08 avec un paramètre m

Soit m un paramètre réel, on considère l'équation d'inconnue réelle x :

$$(E)\ x^2 + (m+5)x + m + \frac{41}{4} = 0$$

Pour quelle(s) valeur(s) de m cette équation admet-elle une seule solution ?

Corrigé

$x^2 + (m+5)x + m + \frac{41}{4}$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 1$, $b = m + 5$
et $c = m + \frac{41}{4}$, de discriminant :

$$\Delta_m = b^2 - 4ac = (m+5)^2 - 4(1)\left(m + \frac{41}{4}\right)$$
$$= (m)^2 + 2(m)(5) + (5)^2 - 4\left(m + \frac{41}{4}\right)$$
$$= m^2 + 10m + 25 - 4m - 41 = m^2 + 6m - 16$$

On a donc : $\Delta_m = m^2 + 6m - 16$. L'équation (E) du second degré en x admet une et une seule solution lorsque son discriminant Δ_m est nul, c'est-à-dire lorsque $m^2 + 6m - 16 = 0$.
$m^2 + 6m - 16$ est de la forme $am^2 + bm + c = 0$ avec $a = 1$, $b = 6$, $c = -16$,
de discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = (6)^2 - 4(1)(-16) = 36 + 64 = 100$
$\Delta > 0$ donc Δ_m s'annule pour deux valeurs de m :

$$m_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 - \sqrt{100}}{2(1)} = \frac{-6 - 10}{2} = \frac{-16}{2} = -8$$
$$m_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 + \sqrt{100}}{2(1)} = \frac{-6 + 10}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Conclusion
L'équation (E) admet une et une seule solution lorsque $m = -8$ ou $m = 2$.

Compléments
- on peut aussi utiliser la forme canonique de Δ_m :

$\Delta_m =$
$\Delta_m = 0 \Leftrightarrow m^2 + 6m - 16 = 0 \Leftrightarrow (m)^2 + 2(m)(3) + (3)^2 - 9 - 16 = 0$
$\Leftrightarrow (m+3)^2 - 25 = 0 \Leftrightarrow (m+3)^2 - (5)^2 = 0$
$\Leftrightarrow (m+3+5)(m+3-5) = 0 \Leftrightarrow (m+8)(m-2) = 0$
$\Leftrightarrow m + 8 = 0\ ou\ m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = -8\ ou\ m = 2$

- pour chacune des deux valeurs de m précédente, on peut calculer l'unique solution de (E) correspondante :

$-$ si $m = -8$, (E) s'écrit :

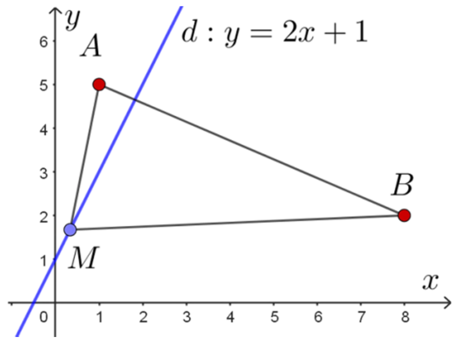
$$x^2 + (-8+5)x - 8 + \frac{41}{4} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + \frac{9}{4} = 0$$
$$\Delta = (-3)^2 - 4(1)\left(\frac{9}{4}\right) = 9 - 9 = 0 \text{ (valeur attendue ...)}$$
$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{+3}{2(1)} = \frac{3}{2}$$

$-$si $m = 2$, (E) s'écrit :

$$x^2 + (2+5)x + 2 + \frac{41}{4} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 7x + \frac{49}{4} = 0$$
$$\Delta = (7)^2 - 4(1)\left(\frac{49}{4}\right) = 49 - 49 = 0 \text{ (valeur attendue ...)}$$
$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-7}{2(1)} = -\frac{7}{2}$$

Défi SECDEG 09 Triangle triangle et droite

Dans un repère orthonormé on note d la droite d'équation $y = 2x + 1$, on considère $A(1;5)$ et $B(8;2)$ et on note M un point variable de d.



1. Calculer AB^2.
2. Montrer que, si on note x_M l'abscisse de M, alors, avec les notations de l'exercice on a l'équivalence :
ABM est rectangle en $M \Leftrightarrow 5x_M^2 - 19x_M + 12 = 0$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $5x^2 - 19x + 12 = 0$. En déduire pour quelles positions M_1 et M_2 de M le triangle ABM est rectangle en M (donner les coordonnées de ces deux points).

Corrigé

1. $A(1;5)\ \ B(8;2)$

Le repère est orthonormé donc on peut utiliser la formule de la distance :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(8-1)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{49+9}$$
$$= \sqrt{58}$$

donc : $AB^2 = \left(\sqrt{58}\right)^2 = 58$.

2. $M \in d: y = 2x + 1$ donc $y_M = 2x_M + 1$.

On a donc $M(x_M; 2x_M + 1)$.

$$AM = \sqrt{(x_M - 1)^2 + (2x_M + 1 - 5)^2}$$
$$AM^2 = (x_M - 1)^2 + (2x_M - 4)^2 = x_M^2 - 2x_M + 1 + 4x_M^2 - 16x_M + 16$$
$$AM^2 = 5x_M^2 - 18x_M + 17$$
$$BM = \sqrt{(x_M - 8)^2 + (2x_M + 1 - 2)^2}$$
$$BM^2 = (x_M - 8)^2 + (2x_M - 1)^2 = x_M{}^2 - 16x_M + 64 + 4x_M^2 - 4x_M + 1$$
$$BM^2 = 5x_M^2 - 20x_M + 65$$

Avec les notations de l'exercice, on a les équivalences :

ABM est rectangle en M

$\Leftrightarrow AB^2 = AM^2 + MB^2$ (Pythagore)

$\Leftrightarrow AM^2 + BM^2 - AB^2 = 0$

$\Leftrightarrow 5x_M^2 - 18x_M + 17 + 5x_M^2 - 20x_M + 65 - 58 = 0$

$\Leftrightarrow 10x_M{}^2 - 38x_M + 24 = 0$

$\Leftrightarrow 2(5x_M^2 - 19x_M + 12) = 0$

$\Leftrightarrow 5x_M^2 - 19x_M + 12 = 0$

Avec les notations de l'exercice on a donc bien l'équivalence :

ABM est rectangle en $M \Leftrightarrow 5x_M^2 - 19x_M + 12 = 0$.

3. Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $5x^2 - 19x + 12 = 0$.

$5x^2 - 19x + 12$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 5$, $b = -19$ et $c = 12$, de discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = (-19)^2 - 4(5)(12) = 121$

$\Delta > 0$ donc il y a deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+19 - \sqrt{121}}{2(5)} = \frac{19 - 11}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} = 0{,}8$$
$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+19 + \sqrt{121}}{2(5)} = \frac{19 + 11}{10} = \frac{30}{10} = 3$$

Les solutions dans $\mathbb{R}$ de $5x^2 - 19x + 12 = 0$ sont : $0{,}8$ et 3.

4. Si $x_M = 0{,}8$

$y_M = 2x_M + 1 = 2 \times 0{,}8 + 1 = 1{,}6 + 1 = 2{,}6$

Si $x_M = 3$

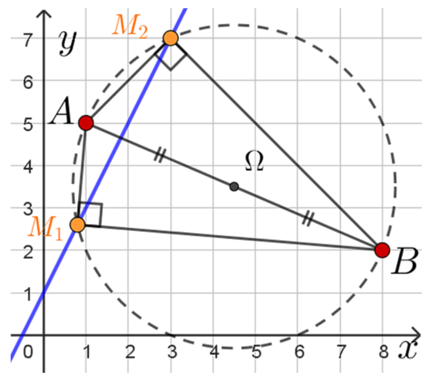
$y_M = 2x_M + 1 = 2(3) + 1 = 7$

Conclusion

Deux positions de M répondent à la question : $\boldsymbol{M_1(0{,}8\,;2{,}6)}$ et $\boldsymbol{M_2(3\,;7)}$.

Complément

On peut construire à la règle et au compas ces deux points : ce sont les points d'intersection de la droite d et du cercle dont un diamètre est $[AB]$.



Défi SECDEG 10 **Équation avec un radical**

On souhaite résoudre l'équation $(E) : 2x + 3\sqrt{x} - 2 = 0$.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue X : $2X^2 + 3X - 2 = 0$
2. En déduire la(les) solution(s) de (E).

Corrigé

1. $2X^2 + 3X - 2$ est de la forme $aX^2 + bX + c$ avec $a = 2$, $b = 3$ et $c = -2$, de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4(2)(-2) = 9 + 16 = 25$.
   $\Delta > 0$ donc l'expression admet deux racines réelles distinctes :
$$X_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 - \sqrt{25}}{2(2)} = \frac{-3 - 5}{4} = -\frac{8}{4} = -2$$
$$X_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 + \sqrt{25}}{2(2)} = \frac{-3 + 5}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$
   L'équation $2X^2 + 3X - 2 = 0$ admet pour solutions : -2 et $\frac{1}{2}$.

$$(E) : 2x + 3\sqrt{x} - 2 = 0$$

La quantité sous une racine carrée doit être positive ou nulle donc il faut que $x \geqslant 0$, donc le domaine d'existence de (E) est : $\mathcal{D} = [0; +\infty[$.

$\mathcal{D}$ est le domaine d'existence de l'équation

Pour $x \in \mathcal{D}$ l'équation s'écrit aussi : $2\left(\sqrt{x}\right)^2 + 3\sqrt{x} - 2 = 0$.

En posant $X = \sqrt{x}$ elle devient : $2X^2 + 3X - 2 = 0$, qui donne d'après la question précédente : $X = -2$ ou $X = \frac{1}{2}$.

Comme $X = \sqrt{x}$, on obtient : $\sqrt{x} = -2$ ou $\sqrt{x} = \frac{1}{2}$.

- $\sqrt{x} = -2$ est impossible (le résultat d'une racine carrée est positif ou nul)
- $\sqrt{x} = \frac{1}{2}$ est équivalent à $\begin{cases} x \geqslant 0 \\ \left(\sqrt{x}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0 \\ x = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$

L'équation (E) admet pour solution : $\boldsymbol{\frac{1}{4}}$.

vérification

$$2 \times \frac{1}{4} + 3\sqrt{\frac{1}{4}} - 2 = \frac{1}{2} + 3 \times \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}} - 2 = \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{2} - 2 = \frac{4}{2} - 2 = 2 - 2 = 0$$

Défi SECDEG 11 **Équation avec paramètre m**

$m \in \mathbb{R}$, (E) est l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$: $x^2 + (m+1)x + 5m^2 + 1 = 0$.

Existe-t-il m tel que (E) admet au moins une solution ?

Corrigé

$x^2 + (m+1)x + 5m^2 + 1$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 1, b = m + 1$ et $c = 5m^2 + 1$, de discriminant :

$\Delta_m = b^2 - 4ac = (m+1)^2 - 4(1)(5m^2 + 1) = m^2 + 2m + 1 - 4(5m^2 + 1)$

$\Delta_m = m^2 + 2m + 1 - 20m^2 - 4 = -19m^2 + 2m - 4$

$-19m^2 + 2m - 4$ est de la forme $am^2 + bm + c$ avec $a = -19$, $b = 2$ et $c = -4$, de discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4(-19)(-4) = -224$

$\Delta < 0$ donc $-19m^2 + 2m - 4$ n'a pas de racine réelle.

Règle (lorsque $\Delta < 0$) : $ax^2 + bx + c$ est du signe de a et ne s'annule pas donc $-19m^2 + 2m - 4$ est du signe de -19 et ne s'annule pas, autrement dit : pour tout $m \in \mathbb{R}, -19m^2 + 2m - 4 < 0$, autrement dit $\Delta_m < 0$ par conséquent (E) a une discriminant toujours strictement négatif donc :

il n'existe pas $m \in \mathbb{R}$ tel que (E) admette une solution réelle.

Défi SECDEG 12 **Somme de deux carrés**

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $x^2 + (10 - x)^2 = 68$, vérifier que les deux solutions sont des entiers naturels.

Corrigé

$x^2 + (10 - x)^2 = 68$
$\Leftrightarrow x^2 + 100 - 20x + x^2 = 68$
$\Leftrightarrow 2x^2 - 20x + 100 - 68 = 0$
$\Leftrightarrow 2x^2 - 20x + 32 = 0$
$\Leftrightarrow 2(x^2 - 10x + 16) = 0$
$\Leftrightarrow x^2 - 10x + 16 = 0$
$\Leftrightarrow (x - 5)^2 - 25 + 16 = 0$
$\Leftrightarrow (x - 5)^2 - 9 = 0$
$\Leftrightarrow (x - 5)^2 - 3^2 = 0$
$\Leftrightarrow (x - 5 + 3)(x - 5 - 3) = 0$
$\Leftrightarrow (x - 2)(x - 8) = 0$
$\Leftrightarrow x - 2 = 0 \text{ ou } x - 8 = 0$
$\Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = 8$

Or $2 \in \mathbb{N}$ et $8 \in \mathbb{N}$ donc les solutions de l'équations sont des entiers naturels.

On peut aussi résoudre $2x^2 - 20x + 32 = 0$ par la méthode du discriminant.

Défi SECDEG 13 **Somme de trois carrés d'entiers consécutifs**

[*d'après Lycée pour adultes, page des premières : lyceedadultes.fr*]

Déterminer x entier naturel non nul tel que : $x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 = 2\,030$.

Corrigé

On a les équivalences :

$x^2+(x+1)^2+(x+2)^2=2\,030$
$\Leftrightarrow x^2+x^2+2x+1+x^2+4x+4=2\,030$
$\Leftrightarrow 3x^2+6x+5-2\,030=0$
$\Leftrightarrow 3x^2+6x-\ 2025=0$
$\Leftrightarrow 3(x^2+2x-675)=0$
$\Leftrightarrow x^2+2x-675=0$
$\Leftrightarrow (x)^2+2(x)(1)+(1)^2-1-675=0$
$\Leftrightarrow (x+1)^2-676=0$
$\Leftrightarrow (x+1)^2-(26)^2=0$
$\Leftrightarrow (x+1+26)(x+1-26)=0$
$\Leftrightarrow (x+27)(x-25)=0$
$\Leftrightarrow x+27=0\ ou\ x-25=0$
$\Leftrightarrow x=-27\ ou\ x=25$

$-27\notin\mathbb{N}$ donc est refusé, $25\in\mathbb{N}$ donc est accepté.
On a donc $x=25$.
On peut aussi résoudre $3x^2+6x-\ 2025=0$ par la méthode du discriminant.

Vérification

Défi SECDEG 14 Une équation de degré 3 avec recherche Python

Pour tout réel x, on pose : $f(x)=4x^3-472x^2-2\,499x+4\,797$.

1. À l'aide du programme Python suivant, à compléter, vérifier que le polynôme du quatrième degré f admet au moins une racine entière.

```
def f(x:int):
    
for x in range(1001):
    if 
        print("une racine entière est : ",x)
```

2. En déduire une factorisation de $f(x)$ puis déterminer les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation : $4x^3-472x^2-2\,499x+4\,797=0$.

Corrigé

1. Programme Python

```
def f(x:int):
    return 4*x**3-472*x**2-2499*x+4797
for x in range(1001):
    if f(x)==0:
        print("une racine entière est : ",x)
```

```
Shell
>>> %Run '1E défi 36 2023-24 .py'
 une racine entière est :  123
```

2. 123 est une racine de f « donc » on peut rechercher une factorisation de $f(x)$ sous la forme : $f(x)=(x-123)(ax^2+bx+c)$.
Le terme de plus haut degré de $f(x)$ est $4x^3$ et celui du membre de droite est ax^3 donc $a=4$.
Le terme constant de $f(x)$ est 4 797 et celui du membre de droite est $(-123c)$ donc : $-123c=4\,797$, ce qui donne $c=-\dfrac{4\,797}{123}=-39$.
On recherche donc b tel que : $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=(x-123)(4x^2+bx-39)$.
Le terme en x de $f(x)$ est $-2\,499x$ et celui du tembre de droite est $(-39-123b)x$ donc :
$$-39-123b=-2\,499\Leftrightarrow 39+123b=2499\Leftrightarrow 123b=2499-39$$
$$\Leftrightarrow 123b=2460\Leftrightarrow x=\frac{2\,460}{123}\Leftrightarrow x=\frac{20\times 123}{123}\Leftrightarrow x=20$$
On a donc, pour tout réel x : $f(x)=(x-123)(4x^2+20x-39)$.

On peut vérifier en développant « à la main » $(x-123)(4x^2+20x-39)$ et constater que cela redonne bien : $4x^3-472x^2-2\,499x+4\,797$.
Autre méthode : conserver a, b et c, obtenir un système de quatre équations à trois inconnues a, b, c donnant $a=4$,$b=20$ et $c=-39$.

L'équation $4x^3-472x^2-2\,499x+4\,797=0$ s'écrit $f(x)=0$, ou encore en utilisant la factorisation précédente :

$$(x-123)(4x^2+20x-39)\ =0$$
$$\Leftrightarrow x-123=0\ ou\ 4x^2+20x-39=0$$

• $x-123=0 \Leftrightarrow x=123$
• $4x^2+20x-39=0$

$4x^2+20x-39$ est de la forme $ax^2+bx+c=0$ avec $a=4$, $b=20$, $c=-39$, de discriminant $\Delta=b^2-4ac=20^2-4(4)(-39)=1\,024$.

$\Delta>0$ donc $4x^2+20x-39$ admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-20-\sqrt{1024}}{2(4)}=\frac{-20-32}{8}=-\frac{52}{8}=-\frac{13}{2}$$
$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-20+\sqrt{1024}}{2(4)}=\frac{-20+32}{8}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$$

<u>Conclusion</u>

L'équation $4x^3-472x^2-2\,499x+4\,797=0$ admet pour solutions :

$$-\mathbf{\frac{13}{2}},\ \mathbf{\frac{3}{2}}\ \text{et}\ \mathbf{123}.$$

1	4x^3-472x²-2499x+4797=0
	Résoudre: $\left\{x=\frac{-13}{2}, x=\frac{3}{2}, x=123\right\}$